論文審査の結果の要旨

氏　名　　村田　実貴生

パンルヴェ方程式の特徴付として，線型微分方程式のモノドロミー保存変形がある。歴史的には，先ずR. Fuchsは4個の確定特異点を持つ2階線型微分方程式を考察し，そのモノドロミーが特異点の位置と独立であるような解の基本系を持つ条件が，パンルヴェ6型方程式 (P_{VI}) により与えられることを発見した。さらに，R. Garnierは不確定特異点を持つ2階線型微分方程式で，そのモノドロミーやストークス係数が保存される条件から，他の5種のパンルヴェ方程式 ($P_I, P_{II}, P_{III}, P_{IV}, P_V$) が得られることを示した。一方，L. Schlesingerは確定特異点を持つ1階微分方程式の線型系のモノドロミー保存変形を考察し，非線形微分方程式の完全積分系を得た。この結果は，M. Jimbo − T. Miwa − K. Uenoにより一般化され，特にM. Jimbo − T. Miwaは変形の条件である非線型完全積分可能系が各パンルヴェ方程式に帰着するような 2×2 行列型の線形方程式系を調べている。それらはパンルヴェ方程式のラックス対と呼ばれている。このような高階線型常微分方程式あるいは線型常微分方程式系の変形をここではホロノミック変形と呼ぶ。

他方，パンルヴェ方程式のいくつかがソリトン方程式のある種の簡約から得られることは以前から知られていた。ソリトン方程式は線型常微分方程式系の等スペクトル変形が特徴付けているから，この変形とホロノミック変形との関係を調べることは自然な発想である。M. Jimbo − T. Miwaは τ 関数の概念を用いて，等スペクトル変形からホロノミック変形を矛盾なく得る手順を述べている。その手順に従えば，パンルヴェ方程式自身だけでなく，そのラックス対も得ることができる。例えば，P_{III} 及び P_{IV} がそれぞれPohlmeyer-Lund-Regge方程式と非線型Schrödinger方程式から簡約を通して得られた。

また反自己双対Yang-Mills方程式の常微分方程式への簡約はパンルヴェ方程式を導出する。そのとき，反自己双対Yang-Mills方程式の 2×2 行列型の線型系もパンルヴェ方程式のラックス対に簡約される。よって多くの研究者がパンルヴェ方程式の研究のために 2×2 行列型のラックス対を扱った。

本論文ではパンルヴェ方程式のラックス対を直接得ることができる等スペクトル変形を探すことを目的とする。特に，2×2 行列型の線型系の特異点の型はパンルヴェ方程式の型と対応するので，2×2 行列型の線型系を対象としている。具体的にはソリトン方程式の性質とパンルヴェ方程式の性質を関係付けることにより，パンルヴェ方程式を研究することを目指している。そのために，ホロノミック変形を佐藤理論を用いて定式化することを試みている。このような研究はソリトン方程式の研究の初期に良く行われていたが，最近になって，P_{VI} が 8×8 行列型の線型系から得られるなどの結果が出て，新しい研究が再開されたところである。パンルヴェ方程式が 2×2 行列型の線型系のホロノミック変形で特徴付けられることを考えれば，ソリトン系とパンルヴェ系を 2×2 行列型の線型系の変形，すなわちラックス対の構成，という枠内で考察することは自然な発想である。

以下，本論文の結果を述べる。ここでは，P_{VI} の 2×2 行列型のラックス対を与える無限次元可積分階層を提案している。この階層は2成分ＫＰ階層の時間変数に依存するよう

なスペクトル変数を用いた拡張で，新しい時間変数を導入し，これと独立であるように制限した階層が通常の2成分ＫＰ階層に等しくなっている。新しい変数についての変形は等スペクトルではない。この拡張した階層は佐藤-Wilson 形式を用いて定式化されている。ここでは線型系の標準的な解である波動関数を巧妙に定義しているが，これはガウスの超幾何積分の被積分関数に類似したものである。

その後ホロノミック変形を等スペクトル変形と同様に考察し，拡張された階層の波動関数を用いてスペクトル変数に関する線型微分方程式系を構成する。佐藤-Wilson 形式では階層の規則は佐藤-Wilson 作用素についての佐藤方程式で与えられるが，本論文でも変形を有する線型系の条件をスペクトル変数に関する佐藤方程式で与えている。

本論文で得られた結果のうち，特に興味のある P_{VI} に関するものは以下の通りである。佐藤-Wilson 作用素から，行列作用素，W，A，B を定義しこれらについて次の結果を示す。

定理 1　　もし行列作用素 W が佐藤方程式を満たせば，W から得られる行列作用素 A, B および B_n は次の *Zakharov-Shabat* 系を満たす。

$$\partial_t A - \partial_\lambda B + [A, B] = 0, \quad \partial_{t_n} A - \partial_\lambda B_n + [A, B_n] = 0 \quad (n \geq 1).$$

特に $t_n \equiv 0$ $(n \geq 1)$ と置くことで，この Zakharov-Shabat 系から

$$\partial_t P - \left[P, R_0 - \frac{R_1}{t}\right] = 0, \quad \partial_t Q - \left[Q, R_0 + \frac{R_1}{1-t}\right] = 0$$

を得る。この系からパンルヴェ6型方程式を導出することができる。

さらに本論文では通常の2成分ＫＰ階層から他のパンルヴェ方程式を扱う統一的な方法を与えている。非線型系のレベルでも，ソリトン方程式とパンルヴェ系の新しい関係が得られている。

本論文の結果をまとめれば，

1　2成分ＫＰ階層の，必ずしも等スペクトルではない拡張を構成したこと，

2　上記の階層から P_{VI} のラックス対を導出したこと，

3　2成分ＫＰ階層の簡約からパンルヴェ系のラックス対を統一的に導いたこと，

となる。

本論文で扱われている問題はパンルヴェ系の研究においては自然なものであるが，特に P_{VI} のラックス対を新しい視点を導入して得たことは注目に値する。ここで与えられた方法は，パンルヴェ系の一つの特徴付にもなったいるが，それだけでなくガルニエ系などの非線型完全積分可能系の研究にも発展する道を与えている。これらは今後の課題となるであろうが，その研究の発展が期待される。

よって，論文提出者　村田　実貴生　は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。