論文審査の結果の要旨

氏名　西川美幸

本論文は３章から成り、第１章での緒言と研究の背景が述べられた後、第２章でシュレーディンガー方程式における特異ポテンシャルの考察が与えられ、第３章で結論が述べられている。シュレーディンガー方程式とその解の研究では、与えられたポテンシャルのもとで固有値問題を解くことが通常の手法であるが、これに対し、本論文では一種の逆問題として、特異点近傍での固有解の様々なタイプの振舞いを先に設定し、これに基づいてポテンシャルの発散の可能性を吟味し、その特異性の分類を行っている。これは解析的に解ける場合に限らずに、より一般に、固有解の局所的な振舞いのみから広くポテンシャルの可能な特異性の分類を行うのに有効な一手段であると考えられ、また物理的な観点からは、遮蔽など何らかの理由により特異点のごく近傍で特異性が消滅する場合にも、(発散領域の切断などの手段を念頭に固有関数の２乗可積分性を考慮せず）比較的容易に議論が進められるという長所がある。

以上のような方針を述べた後、第１章では特異ポテンシャルと物理現象との関わりについて、幾つかの例を引いて説明が与えられている。Coulomb ポテンシャル、逆２乗ポテンシャル、Lennard-Jones ポテンシャル を初め、quark 間の有効ポテンシャル、核子間有効ポテンシャル、Van der Waars による分子間ポテンシャルなどに至るまで、様々な分野で実際に特異ポテンシャルが物理現象の記述に重要な役割を果たしており、従って量子力学的にも、特異点近傍での固有解の振舞いと特異ポテンシャルとの関係を調べることの重要性が強調されている。

第２章は本研究の核心を成す部分である。ここでは、まず一般にポテンシャルが特異性を持つためには、固有関数の２種の振舞いが有り得ること、すなわち(I) 固有関数 y(x) は C^2 級であり、かつゼロ点を持つか、あるいは(II)２階微分 y″ がある点で発散する、のどちらかが必要であることを指摘している。この分類を基礎として、固有関数 y(x)が Laurant 展開可能である場合、またその中の有限項が実数巾を持つ場合、変数 x を x^γ（γ は実数）に置き換えた場合、log x の巾級数展開が可能な場合、あるいは指数関数の引数として Laurant 展開可能な関数が載り、そのために真性特異点を生じる場合を考察している。さらに、これらの場合に加減乗除や微分などの演算を加えた、より一般的な場合を考

察し、上記(I)、(II)のクラスに属するそれぞれの場合に成立する固有解の振舞いとポテンシャルの発散の様子との関係を、二つの性質に要約することに成功している。

第３章の結論部分に記されたその性質は次の通りである：

１．　固有関数に真性特異点の無い場合には、ポテンシャル $V(x)$ の特異点での漸近的振舞いを $V(x) \to x^{\nu}$ としたとき、$\nu < -2$ は実現不可能である。
２．　固有関数が C^2 級の場合には、ポテンシャル $V(x)$ の漸近的振舞いは、$-1 \leq \nu$ あるいは $\nu \leq -2+\varepsilon$（ε は log の可能性を示す）に限られる。

以上の性質は、数学的には厳密に証明されたものではないので「予想（conjecture)」というべきものであるが、物理への応用という見地からは、興味深い結論であると言える。特に、通常のシュレーディンガー方程式を解くという手法とは逆の発想を用いることによって、比較的容易に上記の結果を得たことは、評価に値するものと思われる。第２章および第３章では、これらの性質を直観的に理解するための幾つかの例示が加えられ、固有関数の振舞いによる、ポテンシャルの発散の発生機構についての説明が与えられている。

本論文では固有関数の振舞いを考察するにあたり、固有関数の２乗可積分性を考慮していない。また、量子系としての基底状態の存在も前提としていないが、本研究では前述のように、物理的に何らかの（自然な）切断が入って、ポテンシャルの発散を解消している場合を想定することによってこれらの問題を回避しており、その意味で物理的な立場からの研究となっている。また、考察した固有関数の範疇は、数学的には完全なものではないが、物理として様々な状況で生じるタイプの多くがこれに含まれており、従って物理的には一定の一般性を持っていると言えよう。

なお、本論文は申請者によって既に印刷公表された単著論文に基づくものであり、本研究の発想とその遂行はすべて申請者によるものである。

以上の観点から、申請者に博士（理学）の学位を授与できると認める。