論文の内容の要旨

論文題目　Singular Potentials and Eigenfunctions of Schrödinger Equation

（シュレーディンガー方程式の特異ポテンシャルと固有関数）

氏　名　西川　美幸

普通、繰り込みにおける次元勘定では運動量を次元１と数える。しかし真性特異点などでは n 回微分した後のべきが n 下がらない場合もあるから、微分演算子の次元というのは作用する対象が明示されない限り意味を持たない。一方で、特異点を持つポテンシャル $V(r)$ は様々な物理に登場する。

（特異ポテンシャルの例）

例えばクーロン散乱 $V(r) \propto \frac{1}{r}$ や空間１次元での逆２乗ポテンシャル $V(r) \propto \frac{1}{r^2}$ は、量子力学の教科書に載っている。また電磁量子力学や量子色力学では、所謂「走る結合定数」の効果でポテンシャルに $\frac{\log r}{r}$ に比例する補正項がつく。２核子間でひとつのパイオン（質量 m_π）を交換する過程には、湯川型ポテンシャル $V(r) \propto e^{-m_\pi r}/r$ に $1/r$, $1/r^2$ がかかった形の補正項も現れる。またアインシュタイン－ヒルベルト型ラグランジアンと、平坦時空の周りで揺らぐ計量を仮定して得られる有効ポテンシャルは、ニュートンポテンシャルに対して１ループ量子補正まで考慮すれば

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}\left(1 - \frac{G(m_1+m_2)}{rc^2} - \frac{127Gh}{30\pi^2r^2c^3}\right) \tag{1}$$

の形になることも知られている。

普通は、これらの特異ポテンシャルにカットオフを入れ、原点付近を定義域から除くことで病的なふるまいをなくし、基底状態の存在を保障する。このように与えられたポテンシャルを解いてどのような固有関数解がありえるか調べるのが通常の方法である。しかし本論文では逆に、まず固有関数の原点付近での冪の形を仮定し、それをシュレーディンガー方程式に代入することによって、ポテンシャルがどのような特異点を持ちえるのかを調べる。

1次元でエネルギー $E=0$ とした場合、質量やプランク定数などの定数倍を略せば、シュレーディンガー方程式は

$$\frac{y''(x)}{y(x)} = V(x) \tag{2}$$

となる。ここで $y(x)$ は固有関数で $y''(x)$ はその2回微分である。したがって、ポテンシャル $V(x)$ が特異点を持ちえるのは (I)y が零になるか、さもなければ (II)y'' が特異になる場合である。同じような $V(x)$ の冪に対しても、$y(x)$ には本質的に異なるふたつの場合があることになる。固有関数 $y(x)$ に対応するポテンシャルの特異点に片側から近づく極限での冪 ν のふるまい $V(x) \to x^{\nu} \quad (x \to +0)$ について、以下のふたつの結果が得られた。

第一に、もし固有関数 $y(x)$ に（位数が無限大という意味の孤立）真性特異点がなければ、$\nu < -2$ とはなりえない。これは、特にほかの仮定をせずに成り立つ。ただし、固有関数に（零点あるいは極の集積点があるという意味の、例えば $y(x) = e^{\pm i/x}$ のような）激しい振動的ふるまいがあるときは、そもそも冪が定義できない。厳密には、この極限で単項冪のようにふるまうような、すぐ後で述べる形の真性特異点を仮定している。特にこの場合、$\nu < -2$ となるのは例えば $e^{\pm 1/x}$ のような指数の肩が実数係数級数の真性特異点なので、$x \to +0$ で $V(x)$ は正となる。反面、振動する $y(x) = e^{\pm i/x}$ のような固有関数は $V(x)$ の負号に対応する。

第二に、もし $y(x)$ が C^2 級（二回連続微分可能）ならば、ν の値域は $\nu \leq -2+\epsilon$ と $-1 \leq \nu$ になる。ここで ϵ は、（例えば定数を対数関数で割ったような）無限小の正冪を意味する。この値域に残された「窓」$-2+\epsilon \leq \nu < -1$ を埋めるような固有関数 $y(x)$ を構成することはできなかった。

$x \to +0$ で単項冪のようにふるまう真性特異点を、（論文で定義した加減乗除、合成などの）演算について閉じた形に構成したところ、その一般形は

$$(1)_i + (2)_j + \cdots + (m)_k\,, \qquad \text{ただし}$$

$$\begin{aligned}
(1)_i \quad &:= \Bigg(\sum_{n\in\{n\}_i}^{\infty} \sum_{m_1,\cdots,m_{d_i}=-\infty}^{m_{i1},\cdots,m_{id_i}} a_{inm_1\cdots m_{d_i}} z^n (-\log z)^{m_1} (-\log(-z/\log z))^{m_2} \\
&\qquad\qquad \cdots (-\log(-z/(-\log(-z/\log\cdots z))))^{m_{d_i}} \Bigg)_i, \\
(2)_{\pm j} \quad &:= \sum_{i\in\{i\}_j} (\pm) e^{\pm(1)_i}, \\
(3)_{\pm k} \quad &:= \sum_{j\in\{j\}_k} (\pm) e^{\pm(2)_j},
\end{aligned} \tag{3}$$

となった。ここで係数は皆実数で、たとえひとつの展開の中に複数の無限級数が含まれても、すべての項は昇冪の順に並べられ、初項を顕わに書け、展開の複素平面への解析接続（一価になるよう枝を選んでおく）は原点を除く円環状領域 $0<|z|<r \quad (z:=x+iy)$ でコンパクト一様収束するような、0でない「収束半径」r を持つように構成した。この展開は、真性特異点を形作るような指数関数を計算の途中で展開せずにひとつの項とみなす、という特殊な規則の下で、はじめて冪を計算できる。

この形を仮定した固有関数 $y(z)$ はもし C^2 級ならば，(3) より

$$y(z)=a+bz+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\sim+\sum_{i<0}(\pm)e^{-b_iz^{i\sim\cdots}}+\sum_{j<0}(\pm)e^{-e^{c_jz^{j\sim\cdots}\cdots}}+\sum_{k<0}(\pm)e^{-e^{e^{d_kz^{k\sim\cdots}\cdots}}}\cdots \quad (4)$$

とかける。ここで a,b,a_n は実定数、 $i,j,k,\cdots<0$、$b_i,c_j,d_k,\cdots>0$ で、 $\sim$ は $\log z\sim$ を表わし、高次項を $\cdots$ と略記した。

最後に、結果を空間 N 次元のシュレーディンガー方程式の球対称部分

$$\Delta y(r)=\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d}{dr})-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]y(r)=V(r)y(r) \quad (5)$$

の、軌道角運動量量子数 $l=0$ の場合に拡張した。物理的にはディラック方程式のように C^2 級でない固有関数も許されるが、今仮に (4) を仮定した場合には、

$$\frac{\Delta y(r)}{y(r)} = \frac{y''}{y}+\frac{N-1}{r}\frac{y'}{y}$$

$$\rightarrow \begin{cases} +(N-1)r^{-2} \text{ あるいは高次の項 } (b\neq 0) \\ +n(n+N-2)r^{-2} \ (^{\exists}a_n\neq 0 \text{ は初項}) \\ +(-ib_i)^2r^{2i\pm 2\epsilon-2} \text{（あるいは高次の項）} (b={}^{\forall}a_n=0 \text{ かつ } {}^{\exists}b_i>0) \\ +\infty \ (b={}^{\forall}a_n={}^{\forall}b_i=0 \text{ かつ } {}^{\exists}c_j \text{ または } d_k \text{ または}\cdots>0) \end{cases} \quad (6)$$

となる。ただし ${}^{\forall}b_i=0$ などと一見定義と矛盾する書き方をしたのは、その項が展開に現れずもっと高次の項から始まることを意味する。

固有関数を規格化するために重要な L^2（2乗可積分性）条件が考慮されていないため、どの展開が物理的な固有関数かを決めることは今後の課題といえる。また、上記の展開に含まれない真性特異点も原理的にはありえる。そこで、この博士論文の結果は数学的に充分であるとは言えない。しかし、物理に現れる多くの固有関数はこの論文で解析した中に含まれると思われるため、ここで得られた結果は特異なポテンシャルを扱う上で有用と考えられる。さらにこの博士論文は、前述の (I) と (II) のいずれの場合が現実の特異ポテンシャルを表わすのかという、興味深い問題を提起している。